

Quantencomputing und Quantensimulation
Sommersemester 2022 - Übungsblatt 3

Ausgabe: 02.05.2022, Abgabe: 09.05.2022, Übungen: 12.05.2022

Aufgabe 7: Ein-Qubit Gatter aus Rotationen (5 Punkte)

a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass sich eine Rotation um eine beliebige Achse \mathbf{n} durch Rotationen um die x - und z -Achse darstellen lässt,

$$R_{\mathbf{n}}(\theta) = R_x(\alpha)R_z(\beta)R_x(\gamma)$$

b) (1 Punkt) Eine Rotation um eine beliebige Achse \mathbf{n} lässt sich durch

$$R_{\mathbf{n}}(\theta) = A\sigma_x B\sigma_x C$$

mit $ABC = \mathbb{1}$ ausdrücken. Zeigen Sie, dass diese Aussage durch die Wahl

$$A = R_x(\alpha)R_z(\beta/2)R_z(-\pi/2) \quad B = R_z(-\beta/2)R_y\left(-\frac{\delta + \alpha}{2}\right) \quad C = R_y\left(\frac{\delta - \alpha}{2}\right)R_z(\pi/2)$$

bewiesen wird.

Hinweis: Verwenden Sie $R_x(\alpha) = R_z(-\pi/2)R_y(\alpha)R_z(\pi/2)$.

c) (1 Punkt) Gegeben seien zwei unitäre Transformationen $R_z(\beta)$ und $R_{\pi/3}(\alpha)$, wobei $R_{\pi/3}(\alpha)$ eine Rotation um die Achse $\mathbf{n} = 1/2(1, 0, \sqrt{3})^T$ darstellt. Eine Rotation um die x -Achse lässt sich dann durch

$$R_x(\theta) = R_{\pi/3}(\alpha)R_z(\beta)R_{\pi/3}(\alpha)$$

beschreiben, wobei für die Winkel α, β gilt

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\cos(\theta/2)\sqrt{1 - 3\sin(\theta/2)^2} - 3\sin(\theta/2)^2/4}{\cos(\theta/2)^2 + \sin(\theta/2)^2/4}\right)$$

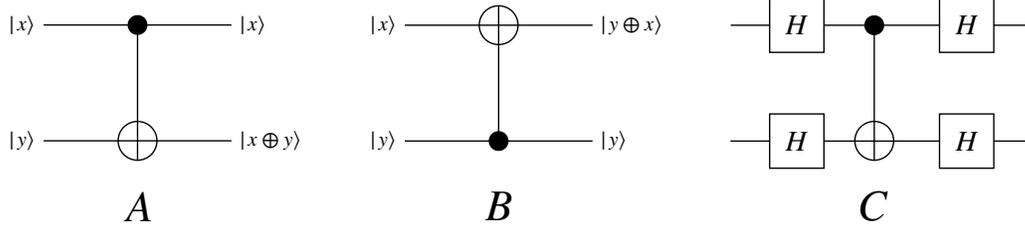
$$\beta = -2 \arctan\left(\frac{\sin(\alpha)\sqrt{3}/2}{\cos(\alpha/2)^2 - \sin(\alpha/2)^2/2}\right)$$

Berechnen Sie den maximalen Drehwinkel θ , der durch diese Transformation erreicht werden kann.

d) (1 Punkt) Wie kann die Rotation $U = R_x(\pi/2)R_z(\phi)R_x(\pi/2)$ durch die beiden gegebenen Rotationen R_z und $R_{\pi/3}$ dargestellt werden?

Aufgabe 8: CNOT und CZ Gatter (4 Punkte)

Betrachten Sie die drei dargestellten Quantenschaltkreise A , B und C .



a) (1 Punkt) Wie lauten die unitären Matrizen, die die beiden Schaltkreise A und B repräsentieren? Geben Sie die Basis an in der Sie die Matrizen darstellen.

b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass Schaltkreis C identisch zu Schaltkreis B ist.

c) (1 Punkt) Wie wirkt Schaltkreis A , wenn als Rechenbasis die Zustände $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$ statt $|0\rangle / |1\rangle$ verwendet werden?

Hinweis: Die Antwort kann aus der Identität aus Aufgabe b) hergeleitet werden.

d) (1 Punkt) Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Schaltkreise

