UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
https://www.burkard.uni-konstanz.de/

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2022/23 - Übungsblatt 0
Ausgabe: 24.10.2022, Abgabe: –, Übungen: 27.10.2022

Aufgabe 1: Schrödinger-Gleichung (mündlich)

Die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung lautet

$$i\hbar\partial_t\psi(t) = H(t)\psi(t)$$

a) Leiten Sie die stationäre Schrödinger-Gleichung im zeitunabhängigen Fall $H(t) = H$ her.

b) Die Wellenfunktion eines Teilchen mit Masse m und Energie $E = 0$ lautet

$$\psi(x) = Axe^{-x^2/L^2}$$

wobei A und L Konstanten sind. Bestimmen sie die potentielle Energie $U(x)$.

Aufgabe 2: Drehimpulsalgebra (mündlich)

a) Zeigen Sie, dass für einen Drehimpuls $\hat{\mathbf{L}}$ gilt: $[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{\mathbf{L}}] = 0$.
Hinweis : Sie können benutzen, dass für die Komponenten von $\hat{\mathbf{L}}$ gilt $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\hat{L}_k$.

b) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von $\hat{L}^2$ nicht negativ sein können.

c) Zeigen Sie, dass für zwei Drehimpulse $\hat{\mathbf{s}}_1$ und $\hat{\mathbf{s}}_2$ mit den Leiteroperatoren $\hat{s}_{j,\pm} = \hat{s}_{j,x} \pm i\hat{s}_{j,y}$ (für $j = 1, 2$) gilt:

$$\hat{s}^2 = (\hat{\mathbf{s}}_1 + \hat{\mathbf{s}}_2)^2 = \hat{s}_1^2 + \hat{s}_2^2 + 2\hat{s}_{1,z}\hat{s}_{2,z} + \hat{s}_{1,+}\hat{s}_{2,-} + \hat{s}_{1,-}\hat{s}_{2,+}.$$

Aufgabe 3: Pauli-Matrizen (mündlich)

Für Spin-1/2-Teilchen (Fermionen, z.B. Elektronen) ergeben sich für die Komponenten des Spinoperators $\mathbf{s} = \hbar\boldsymbol{\sigma}/2$ in der üblichen Quantisierungsachse die *Pauli-Matrizen*

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Der *Antikommutator* zweier Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ ist definiert als $\{\hat{A}, \hat{B}\} := \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$. Zeigen Sie damit

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{1} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

b) Zeigen Sie

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} \mathbb{1} + i \sum_{l=1}^{3} \epsilon_{jkl} \sigma_l$$

und damit für zwei mit $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)^T$ vertauschende Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}$:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbb{1} + i \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

c) Zeigen Sie die für die Zeitentwicklung von Spinsystemen wichtige Beziehung

$$e^{i\alpha\sigma_i} = \mathbb{1} \cos\alpha + i\sigma_i \sin\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$