UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
https://www.burkard.uni-konstanz.de/

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2022/23 - Übungsblatt 9
Ausgabe: 23.12.2022, Abgabe: 16.01.2023, Übungen: 20.01.2023

Aufgabe 29: Dichtewellen (schriftlich, 4 Punkte)

Seien $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$, $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ ($\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger$, $\hat{b}_{\mathbf{k}}$) die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren von bosonischen Teilchen (Quasiteilchen) mit den Transformationsrelationen

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}}\hat{b}_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}}\hat{b}_{-\mathbf{k}}^\dagger, \qquad \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger = u_{\mathbf{k}}\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger + v_{\mathbf{k}}\hat{b}_{-\mathbf{k}} \,,$$

wobei $u_{-\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}}$, $v_{-\mathbf{k}} = v_{\mathbf{k}}$ gilt. Betrachten Sie den Glauber-Zustand (kohärenten Zustand)

$$|g_{\mathbf{k}}\rangle = e^{-|g_{\mathbf{k}}|^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(g_{\mathbf{k}}\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger\right)^m}{m!} |0\rangle$$

mit $\mathbf{k} \neq 0$, $g_{\mathbf{k}} = |g_{\mathbf{k}}|e^{-i\phi_{\mathbf{k}}}$ und $|0\rangle$ als Vakuum der Quasiteilchen. Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle g_{\mathbf{k}}|\hat{n}(\mathbf{r})|g_{\mathbf{k}}\rangle$ des Teilchendichteoperators $\hat{n}(\mathbf{r}) = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} e^{i\mathbf{r}\cdot(\mathbf{k}'-\mathbf{k})}\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger\hat{a}_{\mathbf{k}'}$ im Grenzfall, in dem fast alle Teilchen im Zustand $\mathbf{k} = 0$ anzutreffen sind.

Aufgabe 30: Addition von Geschwindigkeiten (schriftlich, 6 Punkte)

Führt man zwei spezielle Lorentz-Transformationen, deren Geschwindigkeitsvektoren nicht in die gleiche Richtung zeigen, hintereinander aus, so ergibt sich eine spezielle Lorentz-Transformation mit einer zusätzlichen Raumdrehung. Im Folgenden nehmen wir an, dass die erste Transformation in z-Richtung und die zweite senkrecht dazu in x-Richtung erfolgt.

a) Ermitteln Sie die Matrix $T^\mu_{\ \nu}$ der resultierenden Transformation durch Ausführung der beiden speziellen Transformationen mit den Geschwindigkeiten v in z-Richtung und u in x-Richtung. Nutzen Sie dann aus, dass die resultierende Transformation durch eine spezielle Lorentz-Transformation mit der Geschwindigkeit $\mathbf{w}$ und eine räumliche Drehung um den Winkel α dargestellt werden kann, d.h. $T = R(\alpha)L(\mathbf{w})$, um die folgende Relation zu beweisen:

$$|\mathbf{w}| = \sqrt{u^2 + v^2 - \frac{u^2v^2}{c^2}}. \tag{1}$$

Hinweis : Die Drehung beinflusst bestimmte Komponenten von T nicht.

b) Ist das Ergebnis (1) symmetrisch in u und v? Bekommt man die selbe Gesamttransformation, wenn man erst in x- und dann in z-Richtung transformiert? Welche Koordinatentransformation verhält sich genauso?

c) Eine spezielle Lorentz-Transformation in $\mathbf{w}$-Richtung erhält man aus der bekannten Transformation in z-Richtung, indem man zuerst das Koordinatensystem so dreht, dass $\mathbf{w}$ parallel zu z liegt, danach entlang z transformiert, und dann die Drehung rückgängig macht. Zeigen Sie, dass sich damit ergibt (y-Komponente weggelassen) :

$$L(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \gamma(w) & -\gamma(w)\frac{w_x}{c} & -\gamma(w)\frac{w_z}{c} \\ -\gamma(w)\frac{w_x}{c} & 1+(\gamma(w)-1)\frac{w_x^2}{w^2} & (\gamma(w)-1)\frac{w_x w_z}{w^2} \\ -\gamma(w)\frac{w_z}{c} & (\gamma(w)-1)\frac{w_x w_z}{w^2} & 1+(\gamma(w)-1)\frac{w_z^2}{w^2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 31: Zeitdilatation und Längenkontraktion (mündlich)

Zeigen Sie mit Hilfe der Lorentz-Transformation, dass

a) der Zeitabstand zwischen zwei Ereignissen, die an einem Ort im ruhenden Inertialsystem $\mathcal{R}$ stattfinden, kürzer ist als der Zeitabstand zwischen diesen Ereignissen in einem im Bezug auf $\mathcal{R}$ mit einer konstanten Geschwindigkeit v bewegenden Inertialsystem $\mathcal{R}'$.

b) die Länge eines Stabes, die zu einem Zeitpunkt in $\mathcal{R}$ bestimmt wird, größer ist als die Länge dieses Stabes, die zu einem Zeitpunkt in $\mathcal{R}'$ bestimmt wird.