UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Regina Finsterhoelzl
http://tinyurl.com/2023ik4

Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)
Sommersemester 2023 - Übungsblatt 4
Ausgabe: 10.05.2023, Abgabe: 17.05.2023, Übungen: 19.05.2023

Aufgabe 9: Delta-Distribution (schriftlich - 10 Punkte)

Die Diracsche δ-Distribution $\delta(t)$, auch δ-Funktion genannt, ist definiert durch folgende Eigenschaft:

$$f(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)\,\mathrm{d}t.$$

Dabei ist $f(t)$ eine hinreichend glatte Funktion.

a) (1 Punkt) Argumentieren Sie, dass die δ-Distribution als Grenzwert einer unendlich schmalen Gauss-Verteilung aufgefasst werden kann, d.h.

$$\delta(x) \equiv \lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

b) (1 Punkt) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{\delta}(\omega)$ von $\delta(t - t_0)$.

c) (1 Punkt) Zeigen Sie durch Rücktransformation von $\hat{\delta}(\omega)$, dass gilt:

$$\delta(t - t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t_0)}\,\mathrm{d}\omega$$

d) (1 Punkt) Berechnen Sie die Fouriertransformierten von $f(t) = \sin(\omega_0 t)$ und $g(t) = \cos(\omega_0 t)$.

e) (je 1 Punkt) Leiten Sie die folgenden Eigenschaften der δ-Distribution her:

i)

$$\int_a^b \delta(t - t_0)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & \text{falls } a < t_0 < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ii)

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t')\,\mathrm{d}t' = \theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\theta(t)$ ist die *Heavyside*-Stufenfunktion.

iii)

$$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0)$$

iv)

$$\delta(at) = \frac{1}{|\,a\,|}\delta(t)$$

v) Für $f(t)$ stetig differenzierbar und $f'(t_i) \neq 0$ ($\forall t_i$ mit $f(t_i) = 0$):

$$\delta(f(t)) = \sum_{t_i, f(t_i)=0} \frac{\delta(t - t_i)}{\mid f'(t_i) \mid}$$

vi)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t - t_0)\, \mathrm{d}t = -f'(t_0)$$

Aufgabe 10: Lösungen der freien Schrödingergleichung

a) Wie lautet die Lösung Schrödingergleichung für freie Teilchen ($V = 0$) im Eindimensionalen?

b) Warum ist die Lösung aus a) physikalisch nicht sinnvoll für den gesamten Definitionsbereich? Wie lässt sich das Problem lösen? Diskutieren Sie dazu die Kontinuums-Normierung auf eine δ-Funktion und die Box-Normierung.

c) Betrachten Sie das allgemeine (eindimensionale) Wellenpaket

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{i(kx - \omega(k)t)}\, \mathrm{d}k.$$

Was ist die Bedeutung der Funktion $g(k)$? Stellen Sie eine Verbindung von $g(k)$ zur Kontinuum-Normierung her.

d) Zeigen Sie für das allgemeine Wellenpaket, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle p \rangle = 0$. Was lässt sich über die zeitlich gemittelten Erwartungswerte $\langle p \rangle_t$ und $\langle x \rangle_t$ aussagen?

Aufgabe 11: Wellenpaket an Potentialstufe

In der Vorlesung wurde die eindimensionale Lösung für die Streuung einer ebenen Welle mit einer festen Energie an einer Potentialstufe der Höhe V diskutiert.

a) Nach dem Superpositionsprinzip sind auch Überlagerungen von ebenen Wellen verschiedener Energien (bzw. k-Werte) Lösungen. Wie lautet damit die zeitabhängige Lösung für N ebene Wellen?

b) Wie lautet also die allgemeine Lösung für die Streuung an einer Potentialstufe bei einer kontinuierliche Verteilung $g(k)$ der k-Werte (sog. Wellenpakete)?

c) Zeigen Sie, dass das Maximum eines einlaufenden Wellenpakets für $t = 0$ bei $x_0 = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}k}|_{k=k_0}$ liegt, wobei α die Phase von $g(k)$ ist (d.h. $g(k) = |g(k)|e^{i\alpha(k)}$).

Hinweis: $\alpha(k) \approx \alpha(k_0) + (k - k_0)\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}k}|_{k=k_0}$.

d) Betrachten Sie den Fall $E > V$ und bestimmen Sie das zeitabhängige Maximum von einlaufendem und reflektiertem Wellenpaket.

Hinweis: Machen Sie sich die Bedingung der stationären Phase klar, d.h. am Maximum gilt $0 = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}k}|_{k=k_0}$, wobei ϕ die Gesamtphase des Wellenpaketes ist.

e) Betrachten Sie den Fall $0 < E < V$ und bestimmen Sie ebenfalls das Maximum von einlaufendem und reflektiertem Wellenpaket. Interpretieren Sie die Verzögerung des reflektierten Wellenpakets.

Hinweis: $\frac{1 - if(k)}{1 + if(k)} = e^{-2i\theta(k)}$.