UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Regina Finsterhoelzl
http://tinyurl.com/2023ik4

Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)
Sommersemester 2023 - Übungsblatt 11
Ausgabe: 05.07.2023, Abgabe: 12.07.2023, Übungen: 14.07.2023

Aufgabe 31: Vektoren und Darstellungen (8 Punkte)

Durch $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$ sei in einem zweidimensionalen Raum eine orthonormierte Basis gegeben (Basis der $\{a\}$ Darstellung). Zwei Zustandsvektoren $|b_1\rangle$, $|b_2\rangle$ seien durch

$$|b_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|a_1\rangle + \mathrm{i}|a_2\rangle\right), \quad |b_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|a_1\rangle - \mathrm{i}|a_2\rangle\right)$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $|b_1\rangle$, $|b_2\rangle$ ebenfalls eine orthonormierte Basis bilden. (2 Punkte)

b) Geben Sie die $\{a\}$-Darstellung der Ketvektoren $|a_1\rangle$, $|a_2\rangle$, $|b_1\rangle$, $|b_2\rangle$ an. (2 Punkte)

c) Geben Sie die Transformationmatrix U von der $\{a\}$- in die $\{b\}$-Darstellung an und verifizieren Sie, dass U unitär ist. (2 Punkte)

d) Geben Sie die $\{b\}$-Darstellung der Ketvektoren $|a_1\rangle$, $|a_2\rangle$ an. (2 Punkte)

Aufgabe 32: Allgemeine Formulierung der Schrödinger-Robertson Unschärferelation (mündlich)

Die quantenmechanische Unschärferelation hängt mit der mathematischen Tatsache zusammen, dass nicht-kommutierende hermitesche Matrizen (also nicht-kommutierende Observablen) keine gemeinsame Eigenbasis haben. Dies soll in dieser Aufgabe an einem Beispiel demonstriert und diskutiert werden.
Gegeben sei der Zustandsvektor $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, wobei $|0/1\rangle$ ein vollständiges Orthonormalsystem bilden und in einer Basis $\mathcal{B}$ als Einheitsvektoren

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dargestellt werden. α und β sind zwei komplexe Zahlen, wobei die Normierungsbedingung erfordert, dass $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

a) Berechnen Sie die Eigenvektoren $|a_{1,2}\rangle$ und die Eigenwerte $a_{1,2}$ des Operators $\hat{A}$ gegeben durch $\hat{A}|0\rangle = |1\rangle$ und $\hat{A}|1\rangle = |0\rangle$.

   Bestimmen Sie den Erwartungswert $\langle\hat{A}\rangle$ des Operators $\hat{A}$ im Zustand ψ.

b) Berechnen Sie die Eigenvektoren $|b_{1,2}\rangle$ und die Eigenwerte $b_{1,2}$ des Operators $\hat{B}$ gegeben durch $\hat{B}|0\rangle = |0\rangle$ und $\hat{B}|1\rangle = -|1\rangle$.

   Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle \hat{B} \rangle$ des Operators $\hat{B}$ im Zustand ψ.

c) Drücken Sie die allgemeine Unschärferelation für Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ im Zustand ψ,

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|,$$

   durch α und β aus. Hierbei sind $(\Delta A)^2 = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2$ und $(\Delta B)^2 = \langle \hat{B}^2 \rangle - \langle \hat{B} \rangle^2$ die Standardabweichungen. Wie lautet diese Unschärferelation, wenn α und β reelle Zahlen sind? Für welche Zustände ist die Unschärfe minimal?

d) Zeigen Sie schließlich, dass diese Unschärferelation für gegebene Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ und den Zustand ψ tatsächlich für allgemeine α und β erfüllt ist.

   Hinweis: Verwenden Sie die Eulerformel für komplexe Zahlen $\alpha = |\alpha| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_\alpha}$ und $\beta = |\beta| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_\beta}$.

Aufgabe 33: Summenregeln (mündlich)

Ein Hamiltonoperator der Form $\hat{H} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m} + V(\hat{\boldsymbol{r}})$ besitze ein rein diskretes Energiespektrum: $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$.

a) Zeigen Sie, dass für die Matrixelemente der $\hat{x}_k$-Komponente des Ortsoperators in der Energiedarstellung die sogenannte *Thomas-Reiche-Kuhn-Summenregel*

$$\sum_{n'} (E_{n'} - E_n) |\langle n' | \hat{x}_k | n \rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{2m}$$

   gilt. Werten Sie dazu den Doppelkommutator $[\hat{x}_k, [\hat{H}, \hat{x}_k]]$, $k = 1, 2, 3$ aus. Bilden Sie geeignete Matrixelemente mit den Eigenzuständen von $\hat{H}$ auf beiden Seiten der so entstehenden Gleichung und verwenden Sie die Vollständigkeitsrelation $\sum_n |n\rangle\langle n| = 1$.

b) Beweisen Sie, indem Sie durch Auswerten des Kommutators $[\hat{H}, \hat{x}_k]$ die Matrixelemente $\langle n' | \hat{p}_k | n \rangle$ durch die $\langle n' | \hat{x}_k | n \rangle$ ausdrücken, die in den Energiedifferenzen quadratische Summenregel

$$\sum_{n'} (E_{n'} - E_n)^2 |\langle n' | \hat{x}_k | n \rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{m^2} \langle n | \hat{p}_k^2 | n \rangle.$$

Bemerkung: Diese Summenregeln finden bei der Untersuchung von optischen Übergängen in Atomen und Molekülen Anwendung.