Übungen zur Physik IV: Integrierter Kurs (Exp)
Sommersemester 2023

Prof. Dr. Mikhail Fonin

Übungsblatt 8, Ausgabe: 12.06.2023, Abgabe: 19.06.2023
Besprechung in den Übungen am 21.06.2023

Aufgabe 1: Das Wasserstoffatom (schriftlich abzugeben) (**9 Punkte**)

a) Betrachten Sie ein Elektron im Grundzustand des Wasserstoffatoms mit der Wellenfunktion $\Psi_{100}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$. Berechnen Sie $\langle r \rangle$ und $\langle r^2 \rangle$ und drücken Sie die Ergebnisse mithilfe des Bohr'schen Radius aus.
Hinweis: $n! = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$.**(3 Punkte)**

b) Betrachten Sie weiterhin ein Elektron im Grundzustand des Wasserstoffatoms und berechnen Sie $\langle x \rangle$ und $\langle x^2 \rangle$ **(2 Punkte)**.

c) Das Elektron befinde sich nun nicht mehr im Grundzustand des Wasserstoffatoms sondern im Zustand $n = 2$, $l = 1$ und $m = 1$. Bestimmen Sie $\langle x^2 \rangle$. Wählen Sie dafür aus den unten angegebenen Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\theta,\phi)$ und den radialen Wellenfunktionen $R_{nl}(r)$ die jeweils passende aus.
Hinweis: $\int_0^\pi \sin^5(\alpha) d\alpha = \frac{16}{15}$ **(2 Punkte)**

$$Y_0^0 = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/2}$$

$$Y_1^0 = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \cos\theta$$

$$Y_1^{\pm 1} = \mp \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2} \sin\theta \, e^{\pm i\phi}$$

$$Y_2^0 = \left(\frac{5}{16\pi}\right)^{1/2} (3\cos^2\theta - 1)$$

$$Y_2^{\pm 1} = \mp \left(\frac{15}{8\pi}\right)^{1/2} \sin\theta\cos\theta \, e^{\pm i\phi}$$

$$Y_2^{\pm 2} = \left(\frac{15}{32\pi}\right)^{1/2} \sin^2\theta \, e^{\pm 2i\phi}$$

$$Y_3^0 = \left(\frac{7}{16\pi}\right)^{1/2} (5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$$

$$Y_3^{\pm 1} = \mp \left(\frac{21}{64\pi}\right)^{1/2} \sin\theta(5\cos^2\theta - 1) \, e^{\pm i\phi}$$

$$Y_3^{\pm 2} = \left(\frac{105}{32\pi}\right)^{1/2} \sin^2\theta \cos\theta \, e^{\pm 2i\phi}$$

$$Y_3^{\pm 3} = \mp \left(\frac{35}{64\pi}\right)^{1/2} \sin^3\theta \, e^{\pm 3i\phi}$$

$$R_{10} = 2a^{-3/2}\exp(-r/a)$$

$$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{r}{a}\right)\exp(-r/2a)$$
$$R_{21} = \frac{1}{\sqrt{24}}a^{-3/2}\frac{r}{a}\exp(-r/2a)$$

$$R_{30} = \frac{2}{\sqrt{27}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{2}{3}\frac{r}{a} + \frac{2}{27}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)\exp(-r/3a)$$
$$R_{31} = \frac{8}{27\sqrt{6}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{6}\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)\exp(-r/3a)$$
$$R_{32} = \frac{4}{81\sqrt{30}}a^{-3/2}\left(\frac{r}{a}\right)^2\exp(-r/3a)$$

$$R_{40} = \frac{1}{4}a^{-3/2}\left(1 - \frac{3}{4}\frac{r}{a} + \frac{1}{8}\left(\frac{r}{a}\right)^2 - \frac{1}{192}\left(\frac{r}{a}\right)^3\right)\exp(-r/4a)$$
$$R_{41} = \frac{\sqrt{5}}{16\sqrt{3}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{r}{a} + \frac{1}{80}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)\frac{r}{a}\exp(-r/4a)$$
$$R_{42} = \frac{1}{64\sqrt{5}}a^{-3/2}\left(1 - \frac{1}{12}\frac{r}{a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^2\exp(-r/4a)$$
$$R_{43} = \frac{1}{768\sqrt{35}}a^{-3/2}\left(\frac{r}{a}\right)^3\exp(-r/4a)$$

d) Geben Sie den wahrscheinlichsten Wert von r im Grundzustand von Wasserstoff an. Berechnen Sie hierfür zuerst die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Elektron zwischen r und $r+dr$ befindet. *Hinweis: Das Integral über r von r bis r+dr muss nicht explizit berechnet werden. Nehmen Sie an, dass die Scheibe sehr dünn ist, also* $dr \to 0$.
(2 Punkte)

Aufgabe 2: Dipolmatrixelemente (1 Häkchen)

Die einfachsten Wasserstoffwellenfunktionen $\Psi_{n,l,m}(r,\vartheta,\varphi)$ lauten:

$$\Psi_{1,0,0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}a^{3/2}}e^{-r/a}, \qquad \Psi_{2,0,0} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}a^{3/2}}(2 - \tfrac{r}{a})e^{-r/(2a)}$$

$$\text{und} \quad \Psi_{2,1,0} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}a^{3/2}}\frac{r}{a}e^{-r/(2a)}\cos\vartheta.$$

a ist der Bohrsche Radius.

a) Berechnen Sie das Dipolmatrixelement

$$J = \int d^3\vec{r}\ \Psi_A^*\ e\vec{r}\ \Psi_B$$

$$= \int_0^\infty r^2\ dr\ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\vartheta\ d\vartheta\ \Psi_A^*(r,\vartheta,\varphi)\ e\ \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix} \Psi_B(r,\vartheta,\varphi)$$

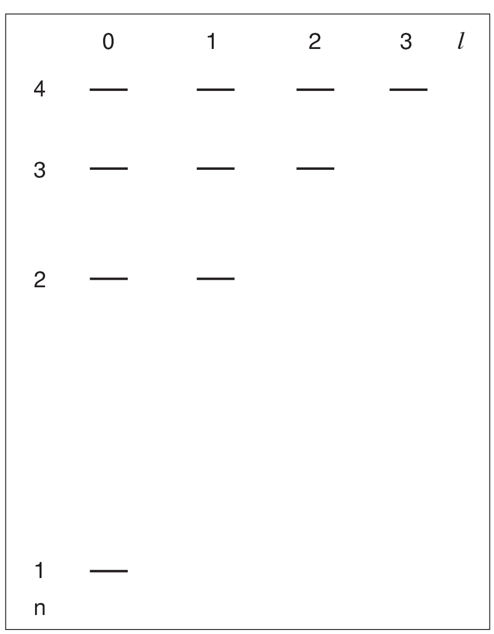
für die Fälle:

$$\text{i) } \Psi_A = \Psi_{1,0,0} \text{ und } \Psi_B = \Psi_{1,0,0},$$
$$\text{ii) } \Psi_A = \Psi_{1,0,0} \text{ und } \Psi_B = \Psi_{2,0,0},$$
$$\text{iii) } \Psi_A = \Psi_{1,0,0} \text{ und } \Psi_B = \Psi_{2,1,0}.$$

(Das e in der J-Formel steht für die Elementarladung.)

Hinweis: $\int_0^\infty x^4 e^{-\frac{3}{2}x} dx = \frac{256}{81}$

b) Nehmen Sie die Ergebnisse von a) als Bestätigung dafür, dass Dipolübergänge zwischen Niveaus beliebiger (hier verschiedener) n erlaubt sind, aber die l sich genau um eins unterscheiden müssen, wobei es egal ist, ob das Ausgangs- oder das Endniveau das höhere l hat. In unserem Wasserstoffmodell (bis jetzt ohne relativistische Korrektur und Spin) gibt es zu jedem n (angefangen mit 1) n entartete Zustände mit $l = 0, \ldots, n-1$. Eine Aufspaltung bzw. Entartung bezüglich m betrachten wir in dieser Teilaufgabe nicht, d.h. Wir haben in a) nur Ψ mit $m = 0$ genommen; also folgern wir, dass es erlaubte Dipolübergänge gibt, wenn Δm und m Null ist, aber andere Fälle haben wir noch nicht geprüft.



Tragen Sie in ein Schema, das alle Zustände bis $n = 4$ zeigt, alle erlaubten Dipolübergänge durch Verbinden der entsprechenden Balken ein, wobei Sie representativ nur Zustände mit $m = 0$ betrachten.)

Aufgabe 3: Der normale Zeemaneffekt (1 Häkchen)

Betrachten Sie einen d-Zustand mit Drehimpulsquantenzahl $l = 2$ und einen f-Zustand mit $l = 3$ (kein Spin) in einem Magnetfeld $B = 1$ T entlang der z-Achse.

a) Zeichnen und berechnen Sie jeweils die möglichen Orientierungswinkel α von $\vec{L}$ bezüglich der z-Achse. Ermitteln Sie auch die zugehörigen Präzessionsfrequenzen $\omega_L = \frac{|\vec{D}|}{|\vec{L}| \sin\alpha}$, wobei das Drehmoment dadurch gegeben ist, dass $\vec{B}$ am magnetischen Moment $\vec{\mu} = -\mu_B \vec{L}/\hbar$ angreift.

b) Die Energie im Magnetfeld beträgt $-\vec{\mu} \cdot \vec{B}$. Wie groß ist für $l = 2$ und $l = 3$ der Energieunterschied benachbarter Niveaus aus der Aufspaltung im Magnetfeld, also solcher, die sich um $\Delta m = 1$ unterscheiden? Skizzieren Sie die optisch erlaubten Übergänge von d nach f; $\Delta m = 0, \pm 1$. Wieviele verschiedene Lichtwellenlängen benötigt man, um alle diese Übergänge anzuregen?