

**Quantencomputing und Quantensimulation**  
**Wintersemester 2023 - Übungsblatt 7**

Ausgabe: 08.12.2023, Abgabe: 15.12.2023, Übungen: 18.12.2023

**Aufgabe 18: Versteckte Untergruppen (2 Punkte)**

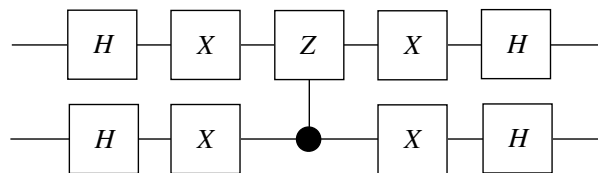
Gegeben sei eine Funktion  $f : \{0, 1\}^3 \mapsto \{0, 1\}^2$  mit  $f(x_2x_1x_0) = x_2x_0$  ( $x_i \in \{0, 1\}$ ). Der Funktionswert ergibt sich also aus dem ersten und letzten Bit der Eingabe.

- a) (1 Punkt) Wie lautet die durch  $f$  versteckte Untergruppe  $K$ ? Geben Sie alle Nebenklassen  $gK$  dieser Funktion an.
- b) (1 Punkt) Durch welchen Quantenalgorithmus lässt sich die versteckte Untergruppe der Funktion  $f$  bestimmen?

**Aufgabe 19: Grover-Algorithmus (5 Punkte)**

Eine Iteration des Grover-Algorithmus  $U = U_s U_a$  besteht aus dem Aufruf eines Orakels  $U_a$  und einer Spiegelung  $U_s$  um den Zustand  $|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} |k\rangle$  mit  $N$  als der Größe der Datenbank. Betrachten Sie eine Datenbank der Größe  $N = 4$ , bei der der gesuchte Zustand  $|x_a\rangle$  durch  $|x_a\rangle = |00\rangle$  gegeben sei. In diesem Fall reicht eine Iteration des Algorithmus um den gesuchten Zustand zu erhalten.

- a) (1 Punkt) Skizzieren Sie einen Schaltkreis zur Implementierung des Orakels  $U_a = \mathbb{1} - 2|x_a\rangle\langle x_a|$ .
- b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass der unten abgebildete Schaltkreis für  $U_s = 2|++\rangle\langle ++| - \mathbb{1}$  tatsächlich eine Spiegelung um  $|s\rangle = |++\rangle$  beschreibt. Überlegen Sie sich dazu, wie  $U_s$  auf die Basiszustände in der  $|\pm\rangle$ -Basis mit  $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$  wirkt und vergleichen Sie die Ergebnisse mit dem abgebildeten Schaltkreis.



- c) (2 Punkte) Skizzieren Sie den Schaltkreis für den Grover-Algorithmus für eine Iteration. Berechnen Sie die Zustände nach dem Orakel und am Ende des Schaltkreises.