



Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2022/23 - Übungsblatt 2

Ausgabe: 07.11.2022, Abgabe: 14.11.2022, Übungen: 17.11.2022

Aufgabe 7: Abbildung $SU(2) \longrightarrow SO(3)$: Teil 1 (schriftlich, 6 Punkte)

Um zwischen den Matrizen­gruppen $SU(2)$ und $SO(3)$ eine Verbindung herzustellen, betrach­tet man die Transformation

$$\mathbf{r} \longmapsto \mathbf{r}' \equiv R\mathbf{r} \quad \text{mit} \quad U\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma} U^\dagger = \mathbf{r}' \cdot \boldsymbol{\sigma},$$

wobei $U \in SU(2)$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, und $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)^T$ den Vektor der Pauli-Matrizen bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass R ein linearer Operator ist und dass dieser Operator Winkel und Abstände zwischen Vektoren nicht verändert.

Hinweis: Betrachten Sie, wie sich das Skalarprodukt von zwei Vektoren bei dieser Transformation verändert und benutzen Sie dabei die Eigenschaft $\text{Sp}(\sigma_i \sigma_j) = 2\delta_{ij}$.

b) Zeigen Sie, dass in der Basis der kartesischen Koordinaten die Komponenten von R als

$$R_{ij} = \frac{1}{2} \text{Sp}(\sigma_i U \sigma_j U^\dagger)$$

ausgedrückt werden können.

c*) (**2 Extrapunkte**) Benutzen Sie eine mögliche Parametrisierung von U durch die Komponenten des Einheitsvektors \mathbf{n} und den Winkel α als $U = e^{i\alpha\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}}$, um R_{ij} durch diese Parameter zu bestimmen:

$$R_{ij} = \cos 2\alpha \delta_{ij} + \sin 2\alpha \epsilon_{ijk} n_k + (1 - \cos 2\alpha) n_i n_j,$$

wobei hier die Einstein'sche Summenkonvention verwendet wurde. Welcher Transformation des dreidimensionalen Vektorraums entspricht dann R im Allgemeinen?

Hinweis: Benutzen Sie $e^{i\alpha\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{1} \cos \alpha + i\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} \sin \alpha$, das Ergebnis aus Teilaufgabe b) und $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ij'k'} = \delta_{jj'}\delta_{kk'} - \delta_{jk'}\delta_{kj'}$.

d) Stellen Sie die Matrizen R in den Fällen $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$, $\mathbf{n} = \mathbf{e}_y$ und $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ auf. Welche Rotationen führen Sie durch?

Aufgabe 8: Abbildung $SU(2) \longrightarrow SO(3)$: Teil 2 (schriftlich, 4 Punkte)

a) Zeigen Sie unter Benutzung von 7c), dass die Matrizen R zu $SO(3)$ gehören.

Hinweis: Dazu muss man nachweisen, dass die Komponenten von R reell sind und $R^T R = \mathbb{1}$, sowie $\det R = 1$ gilt. Die Relationen aus den Hinweisen zu Aufgabe 7 können dabei nützlich sein.

b) Argumentieren Sie, warum die Abbildung $SU(2) \longrightarrow SO(3)$ mit $U \longmapsto R$ einen Homomorphismus darstellt. D.h. für jede Matrix $R \in SO(3)$ existiert mindestens eine Matrix $U \in SU(2)$, die die entsprechende Rotation erzeugt, und beliebige U_1, U_2 aus $SU(2)$ zu $R(U_1 U_2) = R(U_1) R(U_2)$ führen.

Aufgabe 9: Permutationsgruppe S_4 und ihre irreduziblen Darstellungen (mündlich)

Betrachten Sie alle möglichen Permutationen von 4 Teilchen.

- a) Zeigen Sie, dass diese Permutationen eine Gruppe bilden.
- b) Erstellen Sie alle möglichen Young-Diagramme für diese Gruppe und verteilen Sie die Zahlen von 1 bis $N = 4$ auf die Kästchen dieser Diagramme so, dass Sie die sogenannten Normaltableaux Θ_λ bekommen, wobei λ hier dann die entsprechende Zykelstruktur bezeichnet. Beschreiben Sie die Operationen, die im Zusammenhang mit den Young-Diagrammen zu den irreduziblen Darstellungen von S_4 führen.

Hinweis: Im Normaltableau treten die Zahlen von 1 bis N von links nach rechts und von der oberen Zeile zu der unteren Zeile (wie man Bücher liest) in der strikten aufsteigenden Reihenfolge auf.

- c) Die Spur der Matrix $P = \mathcal{D}_i(p)$, die dem Gruppenelement p in der Darstellung \mathcal{D}_i entspricht, heißt *Charakter* des Elements p in dieser Darstellung: $\chi_i(p)$. Zeigen Sie, dass alle Elemente einer Klasse den gleichen Charakter besitzen.

- d) Da die Anzahl von Young-Diagrammen die Anzahl der Klassen in der Gruppe angibt, und die Anzahl der Klassen der Anzahl der irreduziblen Darstellungen entspricht, können Sie die Anzahl der irreduziblen Darstellungen von S_4 bestimmen. Bestimmen Sie dann auch die Dimensionen dieser Darstellungen, indem Sie die Orthogonalitätsrelation

$$\sum_i [\chi_i(\Theta_\lambda)]^* \chi_i(\Theta_\lambda) = \frac{n}{n_\lambda}$$

auf die Klasse anwenden, die nur das triviale Element enthält (für jede Gruppe gibt es immer eine solche Klasse, hier ist es $\Theta_{[4]}$). Hier ist $\chi_i(\Theta_\lambda)$ der Charakter der Klasse Θ_λ (aller Elemente dieser Klasse) in der Darstellung \mathcal{D}_i , n ist die Anzahl der Elemente in der ganzen Gruppe und n_λ ist die Anzahl der Elemente in der Klasse Θ_λ .

Hinweis: Die Darstellungen des trivialen Elements sind immer Einheitsmatrizen der jeweiligen Dimension.

- e) Erstellen Sie alle möglichen Standardtableaux für diese Gruppe. Welchen Zusammenhang sehen Sie zwischen der Anzahl der Standardtableaux und der Dimensionen der irreduziblen Darstellungen?

Hinweis: Im Standardtableau treten die Zahlen von 1 bis N in einer aufsteigenden (aber nicht unbedingt ununterbrochenen) Reihenfolge in jeder Zeile von links nach rechts und in jeder Spalte von oben nach unten auf.