UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
https://www.burkard.uni-konstanz.de/

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2022/23 - Übungsblatt 8
Ausgabe: 16.12.2022, Abgabe: 09.01.2023, Übungen: 12.01.2023

Aufgabe 25: Austauschenergie (schriftlich, 4 Punkte)

Gegeben sei ein fermionischer Zustand $|n_1, \ldots, n_r, \ldots\rangle$. Zeigen Sie, dass die Matrixelemente des Zweiteilchenwechselwirkung-Operators in zweiter Quantisierung V als

$$\langle n_1, \ldots, n_r, \ldots |V| n_1, \ldots, n_r, \ldots \rangle = \frac{1}{2} \sum_{r_1, r_2} \Big(\langle r_1, r_2 | v | r_1, r_2 \rangle - \langle r_1, r_2 | v | r_2, r_1 \rangle \Big) n_{r_1} n_{r_2}$$

geschrieben werden können. Das Matrixelement $\langle r_1, r_2 | v | r_2, r_1 \rangle$ heißt Austauschenergie.

Aufgabe 26: Zwei-Teilchen-Potential in der Wellenvektor-Basis (schriftlich, 6+2 Punkte)

Sei $v(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)$ ein Zwei-Teilchen-Wechselwirkungspotential, welches invariant unter Verschiebung ist. Die Fourier-Transformation ist im Volumen $\Lambda = L^3$ durch

$$\tilde{v}_\Lambda(\boldsymbol{k}) = \int_\Lambda \mathrm{d}\boldsymbol{x} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} v(\boldsymbol{x})$$

definiert. Man definiert auch die dazugehörende periodische Fourier-Reihe

$$v_\Lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{L^3} \sum_{\boldsymbol{k}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tilde{v}_\Lambda(\boldsymbol{k}),$$

mit $\boldsymbol{k} = (2\pi n_1/L, 2\pi n_2/L, 2\pi n_3/L)$ und $n_i \in \mathbb{Z}$.

a) Zeigen Sie, dass in zweiter Quantisierung die Wechselwirkung die folgende Form hat:

$$V = \frac{1}{2L^3} \sum_{\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}} \tilde{v}_\Lambda(\boldsymbol{k}) a^\dagger_{\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}} a^\dagger_{\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}_2} a_{\boldsymbol{k}_1}. \tag{1}$$

b) Berechnen Sie $\tilde{v}_\Lambda(\boldsymbol{k})$ für die Coulomb-Wechselwirkung, wobei Sie den Grenzfall $L \to \infty$ betrachten.

Hinweis: verwenden Sie zuerst $v(\boldsymbol{x}) = e^2 \mathrm{e}^{-\alpha|\boldsymbol{x}|}/(4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{x}|)$ und führen dann den Grenzübergang $\alpha \to 0$ durch.

c*) (Jellium-Modell) Betrachten Sie in erster Quantisierung die Hamilton-Funktion eines System, dass aus N Elektronen (N ist groß) im Volumen $\Lambda = L^3$ und dem positiv geladenen Hintergrund mit der Dichte $\rho = N/\Lambda$ besteht. Überzeugen Sie sich davon, dass dann in zweiter Quantiserung der Term mit $\boldsymbol{k} = 0$ in Gl. (1) verschwindet.

Aufgabe 27: Paarkorrelationen für Bosonen (mündlich)

Nehmen wir an, dass wir N freie Bosonen im Volumen V haben. Die Paarverteilungsfunktion $G^{(2)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ wird als

$$G^{(2)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \equiv \left(\frac{N}{V}\right)^2 g(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \langle\Phi|\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}')\hat{\psi}(\mathbf{r}')\hat{\psi}(\mathbf{r})|\Phi\rangle$$

definiert, wobei $|\Phi\rangle$ den Vielteichenzustand bezeichnet, in dem sich die Bosonen befinden.

a) Wie lautet $G^{(2)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ im Zustand bei dem es $N/2$ Bosonen mit Wellenvektor $\mathbf{k}_1$ und $N/2$ Bosonen mit Wellenvektor $\mathbf{k}_2$ gibt, wobei $\mathbf{k}_1 \neq \mathbf{k}_2$ gilt? Beobachten Sie für diesen Zustand Bunching oder Antibunching wenn N groß ist?

b) Berechnen Sie $G^{(2)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ für den kohärenten Zustand

$$|\alpha\rangle_{\mathbf{k}} = e^{\alpha a_{\mathbf{k}}^\dagger - \alpha^* a_{\mathbf{k}}}|0\rangle,$$

wobei Sie $\langle N\rangle = \langle a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}\rangle$ anstatt N in der Definition von $G^{(2)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ verwenden. Wie sieht es bei diesem Zustand mit Bunching oder Antibunching aus? Geben Sie eine einfache physikalische Interpretation Ihrer Antwort.

Aufgabe 28: Jordan-Wigner Transformation (schriftlich, 5 Extrapunkte)

Die Jordan-Wigner Transformation kann benutzt werden, um fermionische Systeme in Spin-Systeme zu übersetzen, welche durch einen Quantencomputer simuliert werden können. Dazu wird der Zustand ohne Teilchen als ein Spin up und der Ein-Teilchenzustand als ein Spin down Zustand simuliert,

$$|0\rangle = a|1\rangle \equiv |\uparrow\rangle, \quad |1\rangle = a^\dagger|0\rangle \equiv |\downarrow\rangle.$$

Damit erhalten wir auf den ersten Blick eine Äquivalenz zwischen den Leiteroperatoren der Spin Zustände $\sigma_\pm = 1/2(\sigma_x \pm i\sigma_y)$ und den Erzeugern und Vernichtern der Fermionen $a^{(\dagger)}$,

$$a \equiv \sigma_+, \quad a^\dagger \equiv \sigma_-.$$

a) Benutzen Sie $[\sigma_+, \sigma_-] = \sigma_z$ um zu zeigen, dass $1 - 2a^\dagger a \equiv \sigma_z$.

Betrachten wir nun Fermionen auf einer Kette. Hierbei zeigt sich dass die obige Äquivalenz nicht mehr funktioniert, da die Erzeuger und Vernichter für verschiedene Gitterplätze ($i \neq j$) antikommutieren, während die Leiteroperatoren für verschiedene Gitterplätze kommutieren,

$$a_i^\dagger a_j^\dagger = -a_j^\dagger a_i^\dagger \quad \leftrightarrow \quad \sigma_{i,-}\sigma_{j,-} = \sigma_{j,-}\sigma_{i,-}.$$

Um auch diese Eigenschaft durch die Spin-Operatoren auszudrücken, wird die Transformation

$$a_i \rightarrow \sigma_{i,+} \otimes_{k=1}^{i-1} \sigma_{k,z}, \quad a_i^\dagger \rightarrow \sigma_{i,-} \otimes_{k=1}^{i-1} \sigma_{k,z}$$

durchgeführt. Wir erhalten also eine Phase von -1 pro Spin down Zustand auf den Gitterplätzen vor i.

b) Zeigen Sie, dass dadurch die kanonischen Antikommutationsregeln

$$\{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{i,j}, \qquad \{a_i, a_j\} = 0$$

erhalten bleiben.

c) Zeigen Sie, dass $a_n^\dagger a_{n+1} \equiv \sigma_{n,-}\sigma_{n+1,+}$.

d) Benutzen Sie die Jordan-Wigner Transformation, um den fermionischen Hamiltonoperator

$$H = \sum_n J_z \left(1 - 2(a_n^\dagger a_n + a_{n+1}^\dagger a_{n+1}) - 4a_n^\dagger a_{n+1}^\dagger a_n a_{n+1}\right) + \frac{J_\perp}{2}\left(a_n^\dagger a_{n+1} + a_{n+1}^\dagger a_n\right)$$

in die Form

$$H = \sum_n J_z \sigma_{n,z}\sigma_{n+1,z} + \frac{J_\perp}{2}\left(\sigma_{n,-}\sigma_{n+1,+} + \sigma_{n,+}\sigma_{n+1,-}\right)$$

zu bringen.

FRÖHLICHE WEIHNACHTEN UND EINEN GUTEN RUTSCH INS NEUE JAHR!