UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Wolf-Rüdiger Hannes
http://tinyurl.com/2024ik4

Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)
Sommersemester 2024 - Übungsblatt 2
Ausgabe: 17.04.2024, Abgabe: 24.04.2024, Übungen: 26.04.2024

Aufgabe 4: Rutherford-Streuung (schriftlich - 13 Punkte)

Beim Rutherford-Versuch wurden α-Teilchen auf eine dünne Folie geschossen um aus der Verteilung der Streuwinkel Erkenntnisse über die Zusammensetzung der Atomkerns zu erlangen. Das Ergebnis ließ sich nur mit einem punktförmigen Atomkern erklären.

a) (3 Punkte) Leiten Sie aus der Newtonschen Bewegungsgleichung eines α-Teilchens der Masse m_α im Feld einer Z-fach geladenen Punktladung in Zylinderkoordinaten folgende Gleichungen her:

$$m_\alpha\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad m_\alpha\left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right) = 0.$$

Was bedeutet die zweite Gleichung für den Drehimpuls $\mathbf{L} = m_\alpha \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$?

b) (2 Punkte) Das α-Teilchen habe für $t \to -\infty$ den Abstand b von der Streuachse (Stoßparameter) und fliege mit der Geschwindigkeit v_0. Leiten Sie damit diese Bewegungsgleichung her:

$$\ddot{r} = \frac{b^2 v_0^2}{r^3} + \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_\alpha r^2}.$$

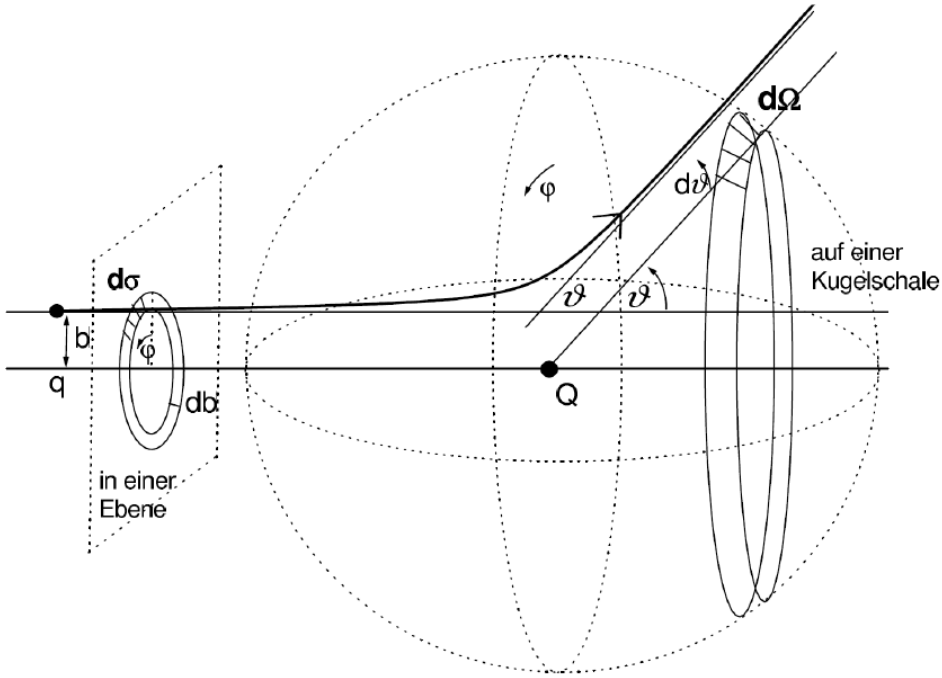
c) (4 Punkte) Lösen Sie die Bewegunsgleichung mit Hilfe der Substitution $u = 1/r$. Es ergibt sich die Gleichung $A\cos(\varphi + \delta) = 1/r + c$. Mit Hilfe der Anfangsbedingungen können Sie dann

$$b(\delta) = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_\alpha v_0^2}\tan\delta$$

bestimmen. Was ist die Bedeutung von δ? (A muss nicht bestimmt werden.)

d) (2 Punkte) Finden Sie den Zusammenhang zwischen ϑ und δ indem Sie sich die Gleichung aus Teilaufgabe c) für $t \to -\infty$ und $t \to \infty$ anschauen. Schreiben Sie das Ergebnis damit um zu:

$$b(\vartheta) = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_\alpha v_0^2}\cot\frac{\vartheta}{2}.$$



e) (2 Punkte) Der differentielle Wirkungsquerschnitt beschreibt die Charakteristik der Streuung und lässt sich so berechnen:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{b(\vartheta)}{\sin\vartheta}\left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\vartheta}\right|.$$

Machen Sie sich diese Formel anhand der Skizze ($Q = Ze, q = 2e$) klar.
Bestimmen Sie damit für $b(\vartheta)$ aus d) den differentiellen Wirkungsquerschnitt für die Rutherfordstreuung (mit $E_0 = m_\alpha v_0^2/2$) zu

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\vartheta) = \frac{Z^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 4E_0^2}\frac{1}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}.$$

Aufgabe 5: Plancksche Strahlungsformel

Das Rayleigh-Jeans-Gesetz führt zu einem unphysikalischen Ergebnis für große Frequenzen (*UV-Katastrophe*). Um dieses Problem zu lösen, führte Planck im Jahre 1900 die Quantenhypothese ein. Hierbei nahm er an, dass ein Oszillator der Frequenz ν nur ganzzahlige Vielfache der Energie $h\nu$ aufnehmen kann. Damit ergab sich das *Plancksche Strahlungsgesetz* (siehe Vorlesung) zu

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu/k_\mathrm{B}T} - 1}.$$

a) Leiten Sie die Grenzfälle für $h\nu \ll k_\mathrm{B}T$ (Rayleigh-Jeans) und $h\nu \gg k_\mathrm{B}T$ (Wiensches Gesetz) aus dem Planckschen Strahlungsgesetz her und skizzieren Sie beide Grenzfälle.

b) Berechnen Sie die gesamte Strahlungsleistung S pro Fläche durch Integration der Strahlungsflussdichte

$$P(\nu, T)\ \mathrm{d}\nu\mathrm{d}\Omega = \frac{c}{4\pi}u(\nu, T)\ \mathrm{d}\nu\mathrm{d}\Omega$$

über das gesamte Frequenzspektrum und den Halbraum (Achtung: Die Abstrahlung ist winkelabhängig nach Lambert) und bestimmen Sie aus dem *Stefan-Boltzmann-Gesetz* $S = \sigma T^4$ die Stefan-Boltzmann-Konstante σ.

Hinweis:
$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} \mathrm{d}x = \frac{\pi^4}{15}.$$

c) Berechnen Sie aus dem Planckschen Strahlungsgesetz die spektrale Energiedichte $\tilde{u}$ in Abhängigkeit der Wellenlänge λ mittels der Transformation $\int u(\nu, T)\, \mathrm{d}\nu = \int \tilde{u}(\lambda, T)\, \mathrm{d}\lambda$.

d) Wilhelm Wien leitete bereits 1893 allein aus der (begründeten) Annahme
$$u(\nu, T) \sim \nu^3 F(\frac{\nu}{T})$$
mit einer unbekannten Funktion F das *Wiensche Verschiebungsgesetz* her. Überlegen Sie sich, wie man unter dieser Annahme zeigen kann, dass das Maximum von $u(\nu, T)$ proportial zur Temperatur T ist, d.h. $\nu_{\mathrm{max}} \sim T$.

e) Bestimmen Sie jeweils das Maximum von $u(\nu, T)$ und $\tilde{u}(\lambda, T)$ (*Wiensches Verschiebungsgesetz*) und zeigen Sie, dass $\nu_{\mathrm{max}}\lambda_{\mathrm{max}} \neq c$ ist. Wie lässt sich das verstehen?

Hinweis: Die Maxima lassen sich nicht analytisch bestimmen.