



Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)
Sommersemester 2024 - Übungsblatt 3

Abgabe: 24.04.2024, Abgabe: 01.05.2024, Übungen: 03.05.2024

Aufgabe 6: Das Gauß'sche Wellenpaket

(schriftlich - 12 Punkte)

Gegeben sei eine Gaußverteilung der Wellenzahlen k in einer Dimension:

$$a(k) = C e^{-ikx_0} e^{-\frac{(k-k_0)^2}{4\sigma^2}} \quad (\sigma > 0).$$

a) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Normierungskonstante $C \in \mathbb{R}$, so dass $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |a(k)|^2 dk = 1$ gilt.

b) (2 Punkte) Berechnen Sie das zugehörige Wellenpaket im Ortsraum durch Fourier-Rücktransformation

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$$

und der Dispersionsrelation $\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$.

Hinweis: Es ergibt sich

$$\psi(x, t) = \frac{C}{\sqrt{4\pi b(t)}} e^{ik_0 c(t)} e^{-\frac{(x-r(t))^2}{4b(t)}}$$

mit $b(t) = \frac{1}{4\sigma^2} + \frac{i\hbar}{2m}t$, $r(t) = x_0 + \frac{\hbar k_0}{m}t$ und $c(t) = x - x_0 - \frac{\hbar k_0}{2m}t$.

c) (2 Punkte) Berechnen Sie $|\psi(x, t)|^2$ und zeigen Sie, dass das Maximum des Wellenpaketes am Ort $x_0 + v_g t$ liegt. $v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0}$ ist hierbei die Gruppengeschwindigkeit. Betrachten Sie auch die Breite des Wellenpaketes und beschreiben Sie das *Zerfließen des Wellenpaketes*.

d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx$ unabhängig von der Zeit ist. Was bedeutet das?

e) (2 Punkte) Berechnen Sie den *Erwartungswert*

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t)^* x \psi(x, t) dx$$

des Ortes x im Zustand $\psi(x, t)$ sowie $\langle x^2 \rangle$.

f) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass für die Varianz (Unschärfe) einer beliebigen Funktion $A(x)$ gilt:

$$(\Delta A)^2 := \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2.$$

g) (2 Punkte) Berechnen Sie damit die Ortsunschärfe Δx und die Impulsunschärfe Δp wobei für den Impuls gilt $p = -i\hbar\partial_x$.

h) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die *Heisenbergsche Unschärferelation* $\Delta x\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ erfüllt ist. Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Aufgabe 7: Diffusion und Gauß'sches Wellenpaket

Die (eindimensionale) Diffusionsgleichung (Wärmeleitungsgleichung)

$$\partial_t\phi(x, t) = D\partial_x^2\phi(x, t)$$

beschreibt die Ausbreitung einer beliebigen Funktion $\phi(x, t)$ (z.B. Temperatur) mit der Zeit aufgrund von Zufallsprozessen wie z.B. Streueignissen.

a) Lösen Sie die Diffusionsgleichung für eine (normierte) Gauß-Verteilung mit einer zeitabhängigen Breite

$$\phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s(t)}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2s(t)}} \quad (s(t) > 0)$$

und finden Sie $s(t)$.

Hinweis: Für die zeitabhängige Breite ergibt sich der Ausdruck

$$s(t) = \frac{D}{s'(t)}.$$

Lösen Sie diese Differentialgleichung mit einem geeigneten Ansatz.

b) Diskutieren und vergleichen Sie das Ergebnis mit der zeitabhängigen Breite der Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ des Gauß'schen Wellenpaketes aus Aufgabe 6.

Aufgabe 8: Parseval Gleichung

Betrachten Sie zwei periodische Funktionen $f(x)$ und $g(x) \in L^2$ mit der Periode L , also $f(x+L) = f(x)$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) und analog für $g(x)$.

a) Drücken Sie $f(x)$ und $g(x)$ als komplexe Fourierreihen mit den Koeffizienten α_n und β_n aus. Nutzen Sie diese Darstellungen, um die folgende Gleichung nachzuweisen

$$\frac{1}{L} \int_c^{c+L} dx f(x)g^*(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n\beta_n^*.$$

Leiten Sie damit die *Parsevalsche Gleichung* für komplexe und reelle Funktionen ab:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \int_c^{c+L} dx |f(x)|^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 && \text{(für komplexe Funktionen)} \\ &= \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) && \text{(für reelle Funktionen).} \end{aligned}$$

a_n und b_n sind die Koeffizienten der reellen Fourierreihe.

b) Finden Sie die Koeffizienten der Fourierreihe für die Funktion $f(x) = x^2$ in dem Intervall $-2 < x \leq 2$:

$$a_0 = \frac{8}{3}, a_n = 16 \frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2}.$$

Hinweis: Beachten Sie die Symmetrie der Funktion $f(x)$.

c) Zeigen Sie mit Hilfe der Parseval Gleichung und dem Ergebnis aus Teilaufgabe b), dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

d) Zeigen Sie mit Hilfe der Definition der (kontinuierlichen) Fouriertransformation das *Parseval-Theorem* (Satz von Plancherel) und damit die Isometrie der Fouriertransformation für eine Funktion $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(\xi)|^2 d\xi$$

und stellen Sie durch Verwendung des Kontinuumslimits den Zusammenhang mit der Parsevalschen Gleichung her.