Fachbereich Physik

Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Joris Kattemölle (Übungen)
Übungen zur Vorlesung Physik III: Integrierter Kurs (Theorie)
Wintersemester 2021/22
`http://tinyurl.com/2021ik3`

Übungsblatt 1

(Abgabe am 3.11.2017 im Hörsaal oder per E-Mail am jeweiligen Tutor.)

Aufgabe 1: Eigenschaften der Fouriertransformation (schriftlich) **(10 Punkte)**

Eine (kontinuierliche) Fouriertransformtion $\mathcal{F}(f)$ einer komplexwertigen Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ ist definiert durch

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\, \mathrm{d}t.$$

a) Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der Fouriertransformation

i) (Linearität) Für $f(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$ gilt $\hat{f}(\omega) = a_1 \hat{f}_1(\omega) + a_2 \hat{f}_2(\omega)$ (1 P.)

ii) Für $f(t)$ reell gilt $\hat{f}(\omega) = \hat{f}^*(-\omega)$.
Ist zusätzlich $f(-t) = f(t)$, also f gerade, so gilt

$$\hat{f}(\omega) = 2\int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, \mathrm{d}t = \hat{f}(-\omega).$$

Ist zusätzlich $f(-t) = -f(t)$, also f ungerade, so gilt

$$\hat{f}(\omega) = -2\mathrm{i}\int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t \, \mathrm{d}t = -\hat{f}(-\omega).$$

(3 P.)

iii) (Verschiebungssatz)
Für $g(t) = f(t + t_0)$ gilt $\hat{g}(\omega) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_0} \hat{f}(\omega)$.
Für $g(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} f(t)$ gilt $\hat{g}(\omega) = \hat{f}(\omega - \omega_0)$. (2 P.)

iv) (Differentation und Multiplikation)
Für $g(t) = f'(t)$ gilt $\hat{g}(\omega) = \mathrm{i}\omega \hat{f}(\omega)$.
Für $g(t) = t f(t)$ gilt $\hat{g}(\omega) = \mathrm{i}\hat{f}'(\omega)$. (2 P.)

b) Eine dreidimensionale Fouriertransformation ist definiert durch

$$\mathcal{F}(f)(\boldsymbol{k}) = \hat{f}(\boldsymbol{k}) = \int f(\boldsymbol{r}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}(\nabla f)(\boldsymbol{k}) = -\mathrm{i}\boldsymbol{k}\hat{f}(\boldsymbol{k})$. (2 P.)

Aufgabe 2: Diracsche δ-Distribution **(4 Kreuze)**

Die Diracsche δ-Distribution $\delta(t)$ ist definiert durch folgende Eigenschaft

$$f(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)\,\mathrm{d}t.$$

Dabei ist $f(t)$ eine hinreichend glatte Funktion.

a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{\delta}(\omega)$ von $\delta(t - t_0)$.

b) Zeigen Sie durch Rücktransformation von $\hat{\delta}(\omega)$, dass gilt:

$$\delta(t - t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t - t_0)}\,\mathrm{d}\omega$$

c) Berechnen Sie die Fouriertransformierten von $f(t) = \sin(\omega_0 t)$ und $g(t) = \cos(\omega_0 t)$.

d) Leiten Sie die folgenden Eigenschaften der δ-Distribution her:

i)

$$\int_a^b \delta(t - t_0)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & \text{falls } a < t_0 < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ii)

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t')\,\mathrm{d}t' = \theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

iii)

$$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0)$$

iv)

$$\delta(at) = \frac{1}{\mid a \mid}\delta(t)$$

v) Für $f(t)$ stetig differenzierbar und $f'(t_i) \neq 0$ ($\forall t_i$ mit $f(t_i) = 0$):

$$\delta(f(t)) = \sum_{t_i, f(t_i)=0} \frac{\delta(t - t_i)}{\mid f'(t_i) \mid}$$

vi)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t - t_0)\,\mathrm{d}t = -f'(t_0)$$

Aufgabe 3: Sphärische Lösungen der Wellengleichung **(4 Kreuze)**

Ebene Wellen sind nur eine spezielle Lösung der homogenen Wellengleichung

$$\left(\Delta - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(\boldsymbol{r}, t) = 0.$$

a) Verwenden Sie mit $r = |\boldsymbol{r}|$ einen kugelsymmetrischen Ansatz $\psi(\boldsymbol{r}, t) = \psi(r, t)$ und führen Sie die dreidimensionale Wellengleichung mit der Substitution $\phi(r, t) = r\psi(r, t)$ auf eine Differenzialgleichung für $\phi(r, t)$ zurück.

Hinweis: Der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten lautet

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

b) Zeigen Sie, dass die Differenzialgleichung für $\phi(r,t)$ aus a) mit Hilfe des Ansatzes

$$\phi(r,t) = \phi_+(kr + \omega t) + \phi_-(kr - \omega t)$$

gelöst wird.

c) Nehmen Sie an, dass die Funktionen $\phi_\pm$ periodisch sind und diskutieren Sie, warum die Lösungen aus b) *Kugelwellen* entsprechen.

d) Wie hängt die Intensität von Kugelwellen vom Abstand r ab? Ist dieses Ergebnis überraschend?