Fachbereich Physik

Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Joris Kattemölle (Übungen)
Übungen zur Vorlesung Physik III: Integrierter Kurs (Theorie)
Wintersemester 2021/22
`www.tinyurl.com/2021ik3`

Universität Konstanz

Übungsblatt 11

(Abgabe am 26.01.22 im Hörsaal oder per E-mail, Übung am 27.01.22 oder 28.01.22)

Aufgabe 26: Phasenraum (2 Kreuze)

a) Die Hamiltonfunktion für ein freies Teilchen im Schwerefeld der Erde laute vereinfacht

$$H = \frac{p^2}{2m} + mgq.$$

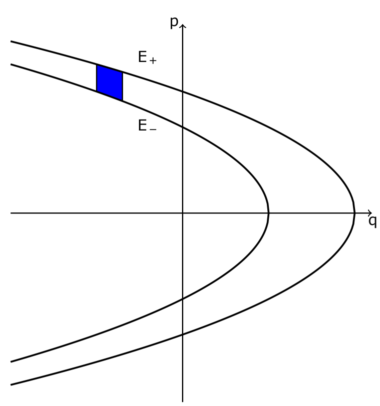
Zeigen Sie, dass die Energie E erhalten ist. Stellen sie darüber eine Gleichung für den Impuls als Funktion der Ortsvariablen auf.

b) Ein Gebiet des Phasenraumes wird en Phasenraumvolumen gennant. Durch Zeitentwicklung kann die Form und der Ort eines Phasenraumvolumens sich änderen. Das *Liouville-Theorem* sagt aus, dass das Volumen eines Phasenraumvolumens jedoch konstant ist.

Skizzieren Sie die Phasenraumtrajektorien für zwei Teilchen mit Energie E^-, E^+, wo $E^- < E^+$, und jeweils irgendein Phasenraumvolumen zu verschiedenen Zeitpunkten jeweils für die drei Fälle mit den Anfangsbedingungen:

i) $p^- < p < p^+$, $0 < q < \Delta q$
ii) $p \approx 0$, $q^- < q < q^+$
iii) $E^-/(mg) < q < E^-/(mg) + \Delta q$ [wobei $E^-/(mg) + \Delta q \ll E^+/(mg)$], $-|p^+| < p < |p^+|$

Hinweis: Beispiel für das Anfangsvolumen bei i):



Aufgabe 27: Poisson-Klammern **(schriftlich, 7 Punkte)**

a) (1 Punkt) Zeigen Sie die *Leibnizsche Produktregel*

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$$

durch Anwendung der Definition der Poisson-Klammer.

b) (1 Punkt) Zeigen Sie weiterhin

$$\partial_t\{f, g\} = \{\partial_t f, g\} + \{f, \partial_t g\}.$$

c) (2 Punkte) Berechnen Sie die Poissonklammern der Komponenten des Drehimpulses mit den Koordinaten, den Impulsen, untereinander und mit dem Drehimpulsquadrat, also

$$\{L_i, q_j\}, \quad \{L_i, p_j\}, \quad \{L_i, L_j\} \quad \text{und} \quad \{L_i, L^2\} \quad \text{mit} \quad i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Hinweis : Nutzen Sie die Leibnizregel aus a) und die fundamentalen Poissonklammern $\{q_i, q_j\} = 0$, $\{p_i, p_j\} = 0$ und $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$ um das explizite Ausrechnen von Ableitungen zu vermeiden.

d) (2 Punkte) Zeigen Sie mit Hilfe der Poisson-Klammern, dass der Drehimpuls für ein (zeitunabhängiges) Zentralpotential eine Erhaltungsgröße ist.

e) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass der n-dimensionale isotrope harmonische Oszillator, gegeben durch

$$H = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \frac{m\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i^2$$

die folgenden Erhaltungsgrößen besitzt:

$$A_{ij} = \frac{1}{2m} p_i p_j + \frac{m\omega^2}{2} q_i q_j.$$

Aufgabe 28: Keplerproblem und Hamiltonsche Mechanik **(3 Kreuze)**

a) Für ein Zentralpotential (vgl. Keplerproblem) mit der Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{\gamma}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

finden Sie die Hamiltonfunktion und drücken Sie diese in Polarkoordinaten der Ebene aus. Zeigen Sie, dass der Runge-Lenz-Vektor

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{L} - m\gamma\frac{\boldsymbol{r}}{r},$$

mit $\boldsymbol{p} = m(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T$, in Polarkoordinaten folgende Form annimmt:

$$\boldsymbol{A} = \left(\frac{p_\varphi^2}{r} - \gamma m\right)\boldsymbol{e}_r - p_r p_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi.$$

b) Nutzen Sie die Poissonklammern, um sich zu verdeutlichen, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r = \frac{p_\varphi}{mr^2}\boldsymbol{e}_\varphi, \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\varphi = -\frac{p_\varphi}{mr^2}\boldsymbol{e}_r. \tag{2}$$

c) Machen Sie sich mit b) klar, dass $\{\boldsymbol{A}, H\} = 0$ gilt.

Hinweis: Die Produktregel aus Aufgabe 27 a) kann hier nützlich sein.