UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
https://www.burkard.uni-konstanz.de/

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2022/23 - Übungsblatt 4
Ausgabe: 21.11.2022, Abgabe: 28.11.2022, Übungen: 01.12.2022

Aufgabe 13: Streuamplitude und Wirkungsquerschnitt (schriftlich, 5 Punkte)

a) Finden Sie in der Bornschen Näherung die Streuamplitude und den totalen Wirkungsquerschnitt für die Streuung des Teilchens der Masse m an einem zentralsymmetrischen Potential:

$$U(r) = U_0 \mathrm{e}^{-r^2/R^2} \ .$$

Hinweis: Sie können $\int_0^\infty e^{-x^2/a^2} \sin(x) x \, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4} |a|^3 e^{-a^2/4}$ benutzen.

b) Geben Sie den Bereich der Anwendbarkeit der Bornschen Näherung in diesem Fall an.

Hinweise:

- Die Bornsche Näherung gilt, wenn bei der Darstellung $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \psi_{\mathbf{k}}^{\text{in}}(\mathbf{r}) + \psi_{\mathbf{k}}^{(1)}(\mathbf{r})$ die Annahme $|\psi_{\mathbf{k}}^{(1)}(\mathbf{r})| \ll |\psi_{\mathbf{k}}^{\text{in}}(\mathbf{r})| = 1$ gerechtfertigt ist.
- Schreiben Sie zuerst $\psi_{\mathbf{k}}^{(1)}(\mathbf{r})$ in der Bornschen Näherung für beliebige (nicht unbedingt kleine) $\mathbf{r}$ explizit auf.
- Überzeugen Sie sich, dass $|\psi_{\mathbf{k}}^{(1)}(\mathbf{r})|$ den Maximalwert im Falle $k \to 0$ (langsame Teilchen) erreicht, d.h. $|\psi_{\mathbf{k}}^{(1)}(\mathbf{r})| \leq |\psi_{k\to 0}^{(1)}(\mathbf{r})|$.
- Benutzen Sie die Gleichung $$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') \ ,$$ wobei $r_<$ ($r_>$) den kleineren (gröSSeren) Wert von r und r' bezeichnet, um die Ungleichung $|\psi_{k\to 0}^{(1)}(\mathbf{r})| \leq |\psi_{k\to 0}^{(1)}(0)|$ zu beweisen.
- Berechnen Sie $|\psi_{k\to 0}^{(1)}(0)|$ und benutzen Sie dann die oben aufgeführten Ungleichungen, um die einschränkende Bedingung für U_0 zu finden.

Aufgabe 14: Partialwellenzerlegung einer ebenen Welle (schriftlich, 5 Punkte)

Entwickeln Sie die ebene Welle $e^{i\mathbf{kr}} = e^{ikr\cos\theta}$ in einer Reihe von Partialwellen nach der Drehimpulsquantenzahl l. Ebene Wellen sind bekanntermaßen Lösungen der Schrödinger-Gleichung für ein freies Teilchen. Man kann das System aber auch als Zentralkraftproblem mit verschwindendem Potential auffassen. Beginnen Sie mit eben diesem Ansatz.

Hinweise:

- Die Lösungen der Differentialgleichung $\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d}{d\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} + 1\right] f_l(\rho) = 0$, die im Ursprung nicht singulär sind, heiSSen sphärische Bessel-Funktionen und werden mit $j_l(\rho)$ bezeichnet.
- Für $\rho \to \infty$ gilt $j_l(\rho) \sim \frac{1}{\rho}\sin(\rho - l\frac{\pi}{2})$.
- Für die Legendre-Polynome gilt $\int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x P_l(x) P_n(x) = \frac{2}{2l+1}\delta_{ln}$.
- Es gilt ferner $P_l(\pm 1) = (\pm 1)^l$.

Aufgabe 15: Zeitabhängige Störungstheorie (mündlich)

Ein linearer harmonischer Oszillator mit der Masse m und der Ladung q befinde sich in einem elektrischen Wechselfeld ($\hat{\mathbf{e}}_z$: Einheitsvektor in z-Richtung):

$$\mathbf{F}(t) = F\hat{\mathbf{e}}_z \cos\omega t.$$

Berechnen Sie in erster Ordnung Störungstheorie die Abhängigkeit des Erwartungswertes des elektrischen Dipolmoments

$$\langle \hat{p} \rangle = \langle \psi | qz | \psi \rangle$$

von der Frequenz ω. Nehmen Sie dazu an, dass sich vor dem Einschalten des Feldes zur Zeit $t = 0$ der Oszillator im Eigenzustand $|E_n^{(0)}\rangle = |n\rangle$ befand.